Lösungen der Extremwertaufgaben

1. Aufgabe:

Hauptbedingung:
$A = x \cdot y$

Nebenbedingung:
$f(x) = y = -x^2 + 6$

Zielfunktion:
$A(x) = 6x - x^3$

Daraus ergibt sich: $x = \pm\sqrt{2} \approx \pm 1{,}41$ und weil $A''(\sqrt{2}) < 0$ kann nur $x = \sqrt{2}$ der gesuchte Wert sein. Außerdem muss x lt. Skizze im positiven Bereich sein.
Für y folgt dann: $y = 4$, womit $A \approx 5{,}66$ FE sein muss.

In der Variante ist die Hauptbedingung $A = 2 \cdot x \cdot y$, so dass sich als Zielfunktion $A(x) = 12x - 2x^3$ ergibt.

2. Aufgabe:

Hauptbedingung:
$d^2 = x^2 + y^2$

Nebenbedingung:
$f(x) = y = -x^2 + 5$
$y^2 = 25 - 10x^2 + x^4$

Zielfunktion:
$d^2 = d(x) = x^4 - 9x^2 + 25$

Aus $d'(x) = 4x^3 - 18x$ ergeben sich durch Rechnung: $x_1 = 0$ und $x_{2/3} \approx \pm 2{,}12$.
Der Wert x_1 ergibt nach Einsetzen in die zweite Ableitung ein Maximum, der Wert x_3 entfällt lt. Skizze und für x_2 ergibt sich ein Minimum, womit der Punkt P die Koordinaten P(2,12|0,5) haben muss.

3. Aufgabe:

Hauptbedingung:
$d^2 = x^2 + y^2$

Nebenbedingung:
$f(x) = y = (x-2)^2$

Zielfunktion:
$d^2 = d(x) = x^2 + (x-2)^2$
$d(x) = 2x^2 - 4x - 4$

Aus $d'(x) = 4x - 4$ wird x = 1, was durch Prüfung mit der zweiten Ableitung ein Minimum ist.
Damit ist y = 1 und der Punkt hat die Koordinaten P(1|1).

4. Aufgabe:

Hauptbedingung:
$A = a \cdot b$

Nebenbedingung:
$u = 6 = 2a - 2b$
$b = 3 - a$

Zielfunktion:

$$A = a \cdot (3-a)$$
$$A(a) = 3a - a^2$$

Aus $A'(a) = 3 - 2a = 0$ und $A''(a) = -2$ folgt sofort a = 1,5 m, was durch die zweite Ableitung als Maximum erkannt werden kann. Für b ergibt sich dann b = 1,5 m. Der Flächeninhalt dieser Dusche beträgt dann 2,25 m².

5. Aufgabe:

Das gegebene Volumen lässt sich als 400 cm³ darstellen, denn 1 ml = 1 cm³.

Hauptbedingung:

$$A_O = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$$

Nebenbedingung:

$$V = 400 = \pi \cdot r^2 \cdot h$$
$$h = \frac{400}{\pi \cdot r^2}$$

$$A_O = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \frac{400}{\pi \cdot r^2}$$

Zielfunktion:

$$A_O(r) = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + \frac{800}{r} = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 800 \cdot r^{-1}$$

Aus den Ableitungen $A'_O(r) = 4 \cdot \pi \cdot r - 800 \cdot r^{-2}$ und $A_O(r) = 4 \cdot \pi + 1600 \cdot r^{-3}$ ergibt sich:

$0 = 4 \cdot \pi \cdot r - \frac{800}{r^2}$ und weiter

$0 = 4 \cdot \pi \cdot r^3 - 800$, was $r^3 = \frac{800}{4 \cdot \pi}$ zur Folge hat. Daraus lässt sich $r \approx 4$ errechnen.

Setzt man dies in die zweite Ableitung ein, so folgt ein Minimum für den Oberflächeninhalt, was ja der Bedingung – möglichst wenig Material – erfüllt. Also sind $h \approx 8$ und $A_O \approx 301{,}6$ cm².

6. Aufgabe:

Hauptbedingung:

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Nebenbedingung:

$$A_O = 600 = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$$
$$h = \frac{300}{\pi \cdot r} - r$$

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot \left(\frac{300}{\pi \cdot r} - r \right)$$

Zielfunktion:

$$V(r) = 300 \cdot r - \pi \cdot r^3$$

Aus $V'(r) = 300 - 3 \cdot \pi \cdot r^2$ und $V''(r) = -6 \cdot \pi \cdot r$ ergibt sich:

$0 = 300 - 3 \cdot \pi \cdot r^2$ wird zu:

$r^2 = \frac{100}{\pi}$, was auf die Lösungen $r_{1/2} \approx 5{,}64$ schließen lässt.

Für r_2 ergibt in der zweiten Ableitung ein Maximum, weshalb diese Lösung entfällt; r_1 erfüllt dagegen die Bedingung des maximalen Volumens.
Für die Höhe folgt dann $h \approx 11{,}29$ und das Volumen muss mit $V \approx 1129$ angegeben werden.

7. Aufgabe:

Hauptbedingung:

$$V_{Zylinder} = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Nebenbedingung:

$$15^2 = r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2$$

$$r^2 = 225 - \left(\frac{h}{2}\right)^2$$

$$V(h) = \pi \cdot \left(225 - \left(\frac{h}{2}\right)^2\right) \cdot h$$

Zielfunktion:

$$V(h) = 225 \cdot \pi \cdot h - \frac{\pi}{4} \cdot h^3$$

Aus den Ableitungen $V'(h) = 225 \cdot \pi - \frac{3 \cdot \pi}{4} \cdot h^2$ und $V''(h) = -\frac{6 \cdot \pi}{4} \cdot h$ ergibt sich:

$0 = 225 \cdot \pi - \frac{3 \cdot \pi}{4} \cdot h^2$ wird zu $\frac{225 \cdot \pi \cdot 4}{3 \cdot \pi} = h^2$ und weiter $h^2 = 300$, was zu $h_{1/2} \approx \pm 17{,}32$ führt. Die zweite Lösung erübrigt sich mit Blick auf die zweite Ableitung und nur h_1 erfüllt die Bedingung des Maximums.
Damit werden $r_{1/2} \approx \pm 12{,}25$ (die zweite Lösung entfällt wieder) und $V \approx 8161{,}86$.
Das sind etwa 8,16 Liter Inhalt.

Das Kugelvolumen $V_{Kugel} \approx 14137{,}17$, womit der Zylinder etwa 57,7% einnimmt.

8. Aufgabe

a) Hauptbedingung:

$$A = 2 \cdot r \cdot l$$

Nebenbedingung:

$$250 = 2 \cdot \pi \cdot r + 2 \cdot l$$

$$125 - \pi \cdot r = l$$

Zielfunktion:

$$A = 2 \cdot r \cdot (125 - \pi \cdot r)$$

$$A(r) = 250 \cdot r - 2 \cdot \pi \cdot r^2$$

Aus den Ableitungen $A'(r) = 250 - 4 \cdot \pi \cdot r$ und $A''(r) = -4 \cdot r$ ergibt sich für den Radius $r = \frac{250}{4 \cdot \pi} \approx 19{,}89$ m, was mit der zweiten Ableitung ein Maximum sein muss. Für die Länge des Sportplatzes folgt dann $l = 62{,}51$ m.

b) Der rechteckige Platz hat einen Flächeninhalt von etwa 1243,32 m², wodurch 5 Säcke Samen zum Preis von 149,00 € benötigt werden.

c) Eine Halbkreisfläche habe einen Inhalt von etwa 621,43 m², für eine 20 cm tiefe Füllung werden dann 124,29 m³ Sand benötigt. Es werden dann Kosten von etwa 3935,72 € entstehen.