

Name: ..... Bewertungseinheiten: ..... Note: .....

Klasse: .....

**Bearbeitungszeit:** **drei Unterrichtsstunden (135 Minuten)**

**Zugelassene Hilfsmittel:** Taschenrechner ohne Graphikdisplay, zur Verfügung gestellte Formelsammlung; Bleistifte dürfen nur für Skizzen benutzt werden.

**Allgemeine Arbeitshinweise:** Die Reinschriften und Entwürfe sind nur auf den ausgegebenen Blättern anzufertigen, die Sie für diese Klassenarbeit erhalten. Sie sind zu nummerieren und mit Ihrem Namen zu versehen.  
Für jede Aufgabe beginnen Sie bitte ein neues Blatt.

**Spezielle Arbeitshinweise:** Der Aufgabensatz besteht aus vier Aufgaben, die Sie alle bearbeiten müssen. Die Lösungswege müssen klar gegliedert, schrittweise und eindeutig nachvollziehbar sowie angemessen kommentiert sein. Nebenrechnungen sind durch Einrücken kenntlich zu machen. Nur einwandfrei Lesbares wird bewertet. Die erste nicht durchgestrichene Lösung zählt. Schwerwiegende oder gehäufte Verstöße gegen die sprachliche Richtigkeit oder gegen die äußere Form führen zu einem Abzug von bis zu einem Punkt (**Malus-Regelung**).  
Wir empfehlen Ihnen, erst einmal einen Entwurf anzufertigen.

**1 Kurvendiskussion** **/40**

Gegeben ist die Funktion  $f$  mit  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ .

- 1.1 Untersuchen Sie das Symmetrieverhalten des Graphen von  $f$ .  
Begründen Sie Ihre Aussage. **/2**
- 1.2 Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte von  $f$  im Unendlichen. **/2**
- 1.3 Ermitteln Sie die Nullstellen von  $f$  und geben Sie den Schnittpunkt mit der  $y$ -Achse an. **/8**
- 1.4 Bestimmen Sie für den Graphen von  $f$  gegebenenfalls Hoch-, Tief-, Wende- und Sattelpunkte. **/14**
- 1.5 Skizzieren Sie den Graphen von  $f$  im Intervall  $[0; 4,5]$ .  
(Hinweis: Wählen Sie für beide Achsen: 1 Einheit = 1cm) **/6**
- 1.6 Bestimmen Sie die Gleichung der Wendetangente  $t$ .  
Zeichnen Sie den Graphen von  $t$  ebenfalls in das Koordinatensystem von 1.5. **/4**
- 1.7 Wie groß ist die Fläche, die von der Wendetangente mit den beiden Koordinatenachsen eingeschlossen wird? **/4**

## 2 Rekonstruktion

/15

Gegeben sei der Graph einer achsensymmetrischen ganzrationalen Funktion  $f$  vierten Grades.

Der Punkt  $E(-2|4)$  ist ein Extrempunkt. Der Punkt  $P\left(1|\frac{19}{16}\right)$  liegt auf dem Graphen von  $f$ .

2.1 Stellen Sie eine ausreichende Anzahl von Bedingungen auf, um die Funktionsgleichung von  $f$  zu bestimmen. Begründen Sie Ihre Bedingungen.

/10

Stellen Sie ein LGS zur Berechnung der Funktionsgleichung von  $f$  auf.

2.2 Lösen Sie Ihr LGS und stellen Sie die Funktionsgleichung auf.

Wenn Sie kein LGS aufstellen können, dann lösen Sie bitte das folgende LGS:

$$\begin{aligned} 16a + 4b - c &= 6 \\ -a + b - c &= \frac{61}{16} \\ 8a + b &= 0 \end{aligned}$$

/5

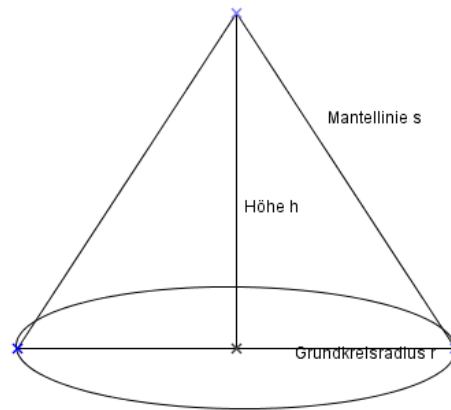
Dieses LGS ist nicht das LGS, auf das Sie im Aufgabenteil 2.1 kommen sollen.

## 3 Extremwertaufgabe

/15

Hier sehen Sie einen Kreiskegel mit der Mantellinie  $s = 3$ , der Höhe  $h$  und dem Grundkreisradius  $r$ .

Sie sollen herausfinden, wie bei gegebenem  $s$   $h$  und  $r$  zu wählen sind, damit das Volumen des Kreiskegels maximal wird.



Dazu gehen Sie bitte so vor:

3.1 Zeigen Sie, dass durch die Funktion  $V$  mit  $V(h) = \frac{1}{3}\pi(9 - h^2) \cdot h$  das Volumen des Kreiskegels in Abhängigkeit von der Höhe  $h$  gegeben wird.

/5

Bestimmen Sie den zulässigen Definitionsbereich von  $V$ .

3.2 Berechnen Sie  $h_{\max}$  und  $r_{\max}$ , indem Sie unter anderem die Maximalstelle von  $V$  berechnen (siehe 3.1). Berechnen Sie auch das maximale Volumen.

/10

## 4 Integralrechnung

/30

Gegeben sind die Funktionen  $f$  und  $g$  mit  $f(x) = \frac{1}{5}x(x+3)(x-1) = \frac{1}{5}x^3 + \frac{2}{5}x^2 - \frac{3}{5}x$  und  $g(x) = x$ .

4.1 Die Graphen von  $f$  und  $g$  umschließen gemeinsam eine Fläche.

Skizzieren Sie die Graphen beider Funktionen und schraffieren Sie die umschlossene Fläche.

/6

4.2 Berechnen Sie die Schnittstellen beider Funktionen.

/6

4.3 Berechnen Sie den Inhalt der in 4.1 schraffierten Fläche.

/10

4.4 Erläutern Sie ohne weitere Rechnung anhand Ihrer Zeichnung, weshalb  $\int_{-3}^1 f(x)dx > 0$ .

/8

Name: ..... Bewertungseinheiten: ..... Punkte: .....

Klasse: .....

**Bearbeitungszeit:** drei Unterrichtsstunden (135 Minuten)

**Zugelassene Hilfsmittel:** Taschenrechner ohne Graphikdisplay, zur Verfügung gestellte Formelsammlung; Bleistifte dürfen nur für Skizzen benutzt werden.

**Allgemeine Arbeitshinweise:** Die Reinschriften und Entwürfe sind nur auf den ausgegebenen Blättern anzufertigen, die Sie für diese Klassenarbeit erhalten. Sie sind zu nummerieren und mit Ihrem Namen zu versehen.  
Für jede Aufgabe beginnen Sie bitte ein neues Blatt.

**Spezielle Arbeitshinweise:** Der Aufgabensatz besteht aus vier Aufgaben, die Sie alle bearbeiten müssen. Die Lösungswege müssen klar gegliedert, schrittweise und eindeutig nachvollziehbar sowie angemessen kommentiert sein. Nebenrechnungen sind durch Einrücken kenntlich zu machen. Nur einwandfrei Lesbares wird bewertet. Die erste nicht durchgestrichene Lösung zählt. Schwerwiegende oder gehäufte Verstöße gegen die sprachliche Richtigkeit oder gegen die äußere Form führen zu einem Abzug von bis zu einem Punkt (**Malus-Regelung**).  
Wir empfehlen Ihnen, erst einmal einen Entwurf anzufertigen.

**1 Kurvendiskussion** /40

Gegeben ist die Funktion  $f$  mit  $f(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 1$ .

- 1.1 Untersuchen Sie das Symmetrieverhalten des Graphen von  $f$ .  
Begründen Sie Ihre Aussage. /2
- 1.2 Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte von  $f$  im Unendlichen. /2
- 1.3 Weisen Sie nach, dass  $-1$  eine Nullstelle von  $f$  ist.  
Ermitteln Sie eventuelle weitere Nullstellen. /8  
Geben Sie außerdem den Schnittpunkt mit der  $y$ -Achse an.
- 1.4 Untersuchen Sie, ob der Funktionsgraph von  $f$  Hoch-, Tief-, Wende- und Sattelpunkte besitzt, und bestimmen Sie gegebenenfalls deren Koordinaten. /14
- 1.5 Skizzieren Sie den Graphen von  $f$  im Intervall  $[-3;1]$   
(Hinweis zur Achseneinteilung:  $x$ -Achse: 1 Einheit = 1cm,  $y$ -Achse: 1 Einheit = 2cm) /6
- 1.6 Ermitteln Sie rechnerisch die Gleichung der Wendenormalen  $n$  und zeichnen Sie diese in das vorhandene Koordinatensystem von 1.5 ein. /4
- 1.7 Erläutern Sie, wie Sie die eingeschlossene Fläche zwischen dem Graphen von  $f$  und der Wendenormalen  $n$  berechnen würden.  
(Hinweis: Keine Berechnung durchführen.) /4

## 2 Rekonstruktion

/15

Der Graph einer ganzrationalen Funktion dritten Grades verläuft durch den Koordinatenursprung.

Er hat bei  $x_1 = 2$  eine waagerechte Tangente und bei  $x_2 = 4$  eine Wendestelle.

Die Wendetangente hat die Steigung  $m = -1$ .

2.1 Stellen Sie eine ausreichende Anzahl von Bedingungen auf, um die Funktionsgleichung von  $f$  zu bestimmen. Begründen Sie Ihre Bedingungen.

/10

Stellen Sie ein LGS zur Berechnung der Funktionsgleichung von  $f$  auf.

2.2 Lösen Sie Ihr LGS und stellen Sie die Funktionsgleichung auf.

Wenn Sie kein LGS aufstellen können, dann lösen Sie bitte das folgende LGS:

$$24a + 2b + c = 3$$

$$12a - 4b + c = 8$$

$$48a + 6b = -2$$

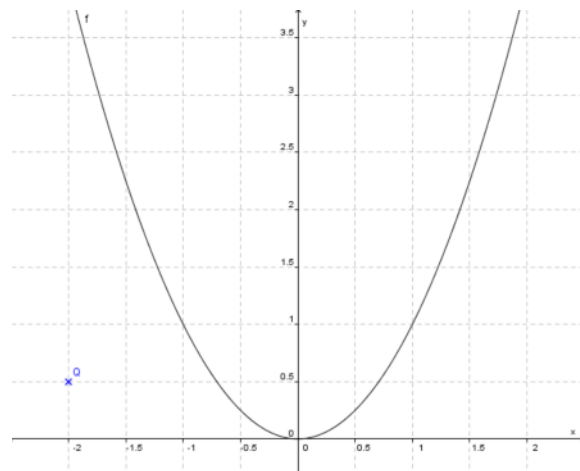
/5

Dieses LGS ist nicht das LGS, auf das Sie im Aufgabenteil 2.1 kommen sollen.

## 3 Extremwertaufgabe

/15

Gegeben seien die Parabel  $p$  mit  $p(x) = x^2$  und der Punkt  $Q\left(-2 \mid \frac{1}{2}\right)$ , siehe Skizze.



Sie sollen die Koordinaten des Parabelpunktes  $P$  bestimmen, der von  $Q$  minimalen Abstand hat, und Sie sollen den minimalen Abstand bestimmen. Dabei gehen Sie bitte so vor:

3.1 Zeigen Sie: Ist  $P(x \mid p(x))$  ein beliebiger Punkt auf der Parabel, so gibt  $f(x)$  mit

/8

$$f(x) = x^4 + 4x + \frac{17}{4} \text{ das Quadrat des Abstandes der Punkte } P \text{ und } Q \text{ an.}$$

3.2 Berechnen Sie den Punkt  $P(x_{\min} \mid p(x_{\min}))$  auf der Parabel mit minimalem Abstand von  $Q$ . Berechnen Sie dazu unter anderem die Minimalstelle von  $f$  (siehe 3.1) und den minimalen Abstand.

/7

## 4 Integralrechnung

/30

Gegeben sei die Funktionenschar  $f_k$  mit  $f_k(x) = k \cdot x^3 - 3k \cdot x; k > 0$ .

4.1 Setzen Sie  $k = 2$ , berechnen Sie die Nullstellen von  $f_2$  und skizzieren Sie den Graphen.

/11

4.2 Erläutern Sie ohne Rechnung, welches Ergebnis  $\int_{-5}^5 f_2(x) dx$  hat.

/6

4.3 Berechnen Sie  $k$  so, dass die von  $f_k$  und der  $x$ -Achse eingeschlossene Fläche den Inhalt  $A = 1,5$  hat.

/13