

Name: ..... Bewertungseinheiten: ..... Note: .....

Klasse: .....

**Bearbeitungszeit:** drei Unterrichtsstunden (135 Minuten)

**Zugelassene Hilfsmittel:** Taschenrechner ohne Graphikdisplay, zur Verfügung gestellte Formelsammlung; Bleistifte dürfen nur für Skizzen benutzt werden.

**Allgemeine Arbeitshinweise:** Die Reinschriften und Entwürfe sind nur auf den ausgegebenen Blättern anzufertigen, die Sie für diese Klassenarbeit erhalten. Sie sind zu nummerieren und mit Ihrem Namen zu versehen.  
Für jede Aufgabe beginnen Sie bitte ein neues Blatt.

**Spezielle Arbeitshinweise:** Der Aufgabensatz besteht aus vier Aufgaben, die Sie alle bearbeiten müssen. Die Lösungswege müssen klar gegliedert, schrittweise und eindeutig nachvollziehbar sowie angemessen kommentiert sein. Nebenrechnungen sind durch Einrücken kenntlich zu machen. Nur einwandfrei Lesbares wird bewertet. Die erste nicht durchgestrichene Lösung zählt.  
Schwerwiegende oder gehäufte Verstöße gegen die sprachliche Richtigkeit oder gegen die äußere Form führen zu einem Abzug von bis zu einem Punkt (**Malus-Regelung**).  
Wir empfehlen Ihnen, erst einmal einen Entwurf anzufertigen.

1. Gegeben ist die Funktion  $f(x) = -2x^3 - 6x^2 + 4$ .
- 1.1 Weisen Sie nach, dass  $f$  weder punktsymmetrisch zum Ursprung noch achsensymmetrisch zur  $y$ -Achse ist.
- 1.2 Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte von  $f$  im Unendlichen.
- 1.3 Untersuchen Sie die Funktion auf Schnittpunkte des Graphen von  $f$  mit den Koordinatenachsen, auf Extrem- und Wendepunkte.  
Begründen Sie, warum  $f$  keinen Sattelpunkt besitzt.
- 1.4 Skizzieren Sie den Graphen von  $f$  im Intervall  $[-3; 1]$ .
- 1.5 Bestimmen Sie die Steigung der Funktion  $f$  im Punkt  $P(-1 | f(-1))$ .
- 1.6 Ermitteln Sie rechnerisch die Gleichung der Wendenormalen  $n$  und zeichnen Sie  $n$  in das Koordinatensystem von 1.4.
- 1.7 Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von der Normalen  $n$  und der  $x$ -Achse über dem Intervall  $[-3; -1]$  eingeschlossen wird, und berechnen Sie den Umfang dieser Flächenfigur.

(42 BE)

2. Rekonstruieren Sie die Funktionsgleichung der ganzrationalen Funktion vierten Grades, die die Nullstelle  $x = -1$ , den Hochpunkt  $H(0/4)$  und den Wendepunkt  $W(1/-2)$  aufweist.  
Bitte begründen Sie die von Ihnen aufgestellten Bedingungen an die Koeffizienten der Funktionsgleichung. Sollten Sie kein lineares Gleichungssystem (LGS) aufstellen können, so lösen Sie bitte das folgende LGS:
- I  $4a + b - c - 2d - 2e = 4$   
 II  $2a + 2c + d + 2e = -2$   
 III  $6a + 3b + c = 0$   
 IV  $d + 2e = 8$   
 V  $e = 4$
- (15 BE)

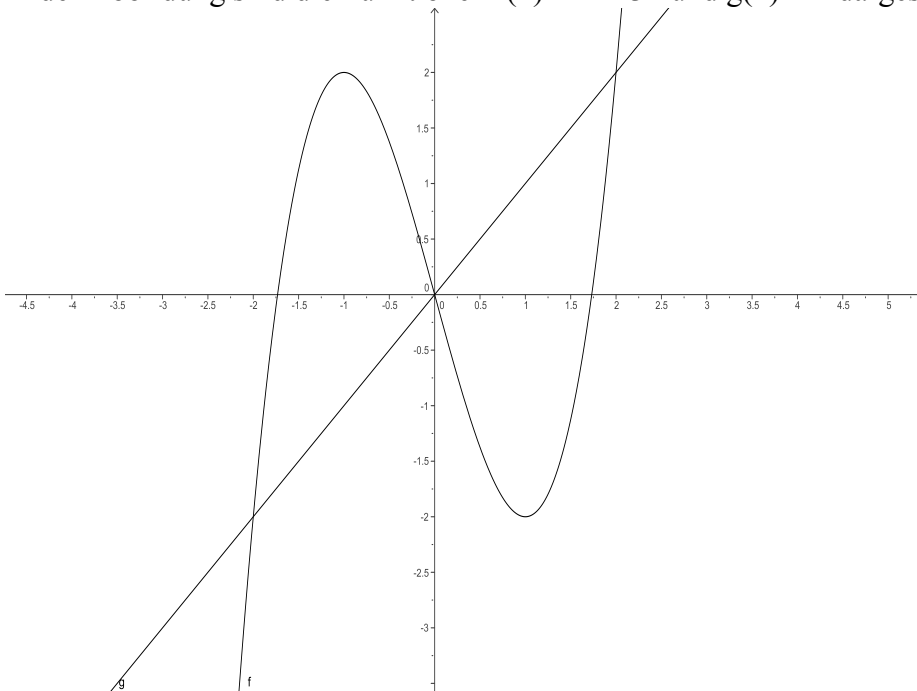
3. Gegeben sei die Parabel  $f$  mit  $f(x) = 9 - \frac{1}{2}x^2$ . Wir betrachten diese Parabel im ersten Quadranten, also für nichtnegative  $x$  und  $y$ .  
Sie sollen die Koordinaten der Parabelpunkte  $P_{\min}$  und  $P_{\max}$  bestimmen, wobei  $P_{\min}$  vom Koordinatenursprung  $O(0|0)$  **minimalen** Abstand und  $P_{\max}$  vom Koordinatenursprung  $O(0|0)$  **maximalen** Abstand haben.

Dabei gehen Sie bitte so vor:

- 3.1 Zeigen Sie, dass die Funktion  $d$  mit  $d(x) = \frac{1}{4}x^4 - 8x^2 + 81$  das Quadrat des Abstands des Parabelpunktes  $P(x|f(x))$  vom Ursprung beschreibt und daher die zu minimierende bzw. maximierende **Zielfunktion** ist.
- 3.2 Berechnen Sie die Minimalstelle von  $d$  und die Koordinaten von  $P_{\min}$ .  
**Hinweis:** Bitte beachten Sie, dass  $P_{\min}$  im ersten Quadranten liegen muss.
- 3.3 Berechnen Sie die Maximalstelle von  $d$  und die Koordinaten von  $P_{\max}$ .  
**Hinweis:** Bitte beachten Sie, dass  $P_{\max}$  im ersten Quadranten liegen muss.

(16 BE)

4. In der Abbildung sind die Funktionen  $f(x) = x^3 - 3x$  und  $g(x) = x$  dargestellt.



- 4.1 Berechnen Sie die Nullstellen von  $f$ .  
 4.2 Ermitteln Sie eine Stammfunktion von  $f$ .  
 4.3 Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die  $f$  mit der Abszisse einschließt.  
 4.4 Berechnen Sie die Schnittstellen von  $f$  und  $g$ .  
 4.5 Ermitteln Sie rechnerisch den Inhalt der Fläche, die  $f$  und  $g$  einschließen.

(15 BE)

Name: ..... Bewertungseinheiten: ..... Note: .....

Klasse: .....

**Bearbeitungszeit:** drei Unterrichtsstunden (135 Minuten)**Zugelassene Hilfsmittel:** Taschenrechner ohne Graphikdisplay, zur Verfügung gestellte Formelsammlung; Bleistifte dürfen nur für Skizzen benutzt werden.**Allgemeine Arbeitshinweise:** Die Reinschriften und Entwürfe sind nur auf den ausgegebenen Blättern anzufertigen, die Sie für diese Klassenarbeit erhalten. Sie sind zu nummerieren und mit Ihrem Namen zu versehen.  
Für jede Aufgabe beginnen Sie bitte ein neues Blatt.**Spezielle Arbeitshinweise:** Der Aufgabensatz besteht aus vier Aufgaben, die Sie alle bearbeiten müssen. Die Lösungswege müssen klar gegliedert, schrittweise und eindeutig nachvollziehbar sowie angemessen kommentiert sein. Nebenrechnungen sind durch Einrücken kenntlich zu machen. Nur einwandfrei Lesbares wird bewertet. Die erste nicht durchgestrichene Lösung zählt.  
Schwerwiegende oder gehäufte Verstöße gegen die sprachliche Richtigkeit oder gegen die äußere Form führen zu einem Abzug von bis zu einem Punkt (**Malus-Regelung**).  
Wir empfehlen Ihnen, erst einmal einen Entwurf anzufertigen.

1. Gegeben ist die Funktion  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$ .
- 1.1 Weisen Sie nach, dass  $f$  weder punktsymmetrisch zum Ursprung noch achsensymmetrisch zur  $y$ -Achse ist.
- 1.2 Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte von  $f$  im Unendlichen.
- 1.3 Untersuchen Sie die Funktion auf Schnittpunkte des Graphen von  $f$  mit den Koordinatenachsen, auf Extrem- und auf Wendepunkte.  
Begründen Sie, warum  $f$  keinen Sattelpunkt besitzt.
- 1.4 Skizzieren Sie den Graphen von  $f$  im Intervall  $[-2,5; 4,5]$ .  
(Hinweis zur Achseneinteilung:  $x$ -Achse: 1 Einheit = 1cm,  $y$ -Achse: 1 Einheit = 0,5cm)
- 1.5 An welcher Stelle hat  $f$  den Anstieg  $-9$ ?
- 1.6 Bestimmen Sie die Gleichungen der Tangente  $t$  und der Normalen  $n$  an der Stelle  $x = 2$ .  
Zeichnen Sie die Graphen von  $t$  und  $n$  ebenfalls in das Koordinatensystem von 1.4.
- 1.7 Wie groß ist die Fläche, die von der Tangente, der Normalen und der Ordinate vollständig eingeschlossen wird?

(42 BE)

2. Eine ganzrationale Funktion vierten Grades soll im Punkt  $P(0|1)$  eine waagerechte Tangente aufweisen und im Wendepunkt  $W(1|0)$  eine Tangente mit der Steigung  $m = -2$ .

Rekonstruieren Sie die Funktionsgleichung.

Bitte begründen Sie die von Ihnen aufgestellten Bedingungen an die Koeffizienten der Funktionsgleichung.

Sollten Sie kein lineares Gleichungssystem (LGS) aufstellen können, so lösen Sie bitte das folgende LGS:

$$\text{I} \quad a + b + c + 2d + e = 0$$

$$\text{II} \quad 6a + 3b + c = 0$$

$$\text{III} \quad 3a + 2b + c - e = -2$$

$$\text{IV} \quad 4a - 2c - 2d = 4$$

$$\text{V} \quad e = 1$$

(15 BE)

3. Die Wasserwerke müssen einen neuen Abwasserkanal bauen, der die Querschnittsfläche eines Rechtecks (Höhe  $h$ ) mit einem aufgesetzten Halbkreis (Radius  $r$ ) hat. Die Querschnittsfläche soll den Flächeninhalt  $A = 10 \text{ m}^2$  haben.

Bestimmen Sie die Maße (also  $h$  und  $r$ ) der Querschnittsfläche, wenn der Umfang  $u$  des Querschnittes möglichst klein werden soll.

**Zur Kontrolle:** Für den zu minimierenden Umfang  $u$  gilt  $u(r) = \left(2 + \frac{\pi}{2}\right)r + \frac{10}{r}$ . Bitte weisen Sie dies nach.

(16 BE)

4. Gegeben sind die Scharkurven  $f_a(x) = -x^3 + ax$ ;  $a > 0$ .

4.1 Bestimmen Sie rechnerisch die Nullstellen der Kurvenschar.

4.2 Berechnen Sie die Fläche, die  $f_a$  mit der Abszisse einschließt.

4.3 Berechnen Sie eine Stammfunktion zur Kurvenschar in Abhängigkeit vom Parameter  $a$ .

4.4 Welche Scharkurven schließen mit der Abszisse eine Fläche von 9 FE ein?  
Begründen Sie Ihre Aussage durch Rechnung.

(15 BE)