Die Ableitung exponentieller Funktionen

1. Die Ableitung der Gundfunktion $f(x)=e^x$

Im Folgenden werden nur sogenannte „e – Funktionen“ behandelt. Andere Funktionstypen treten in der Schulpraxis eher selten auf, sollten Sie hier Fragen haben, so wenden Sie sich bitte an Ihren Mathe – Lehrer oder an mich.

Gegeben sie die Funktion *f*: $f(x)=e^x$. Gesucht ist nun die erste Ableitung von *f*.

Setzt man diese Funktion in den Differentialquotienten ein, so erhält man:

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^x\cdot e^h-e^x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^x\cdot(e^h-1)}{h}=e^x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}$$

Es ist nun der Grenzwert $\lim\limits_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}$ zu ermitteln. Hier können Sie die bereits verwendeten Test-einsetzungen nutzen und anschlieend den Grenzwert abschätzen.

h	0,1	0,01	0,001
$\frac{e^h-1}{h}$	≈ 1,05	≈ 1,01	≈ 1,001

Es kann nun vermutet werden, dass dieser Grenzwert gegen 1 strebt, woraus sich oben folgendes ergibt: $e^x\cdot\lim\limits_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=e^x\cdot 1=e^x=f'(x)$.

2. Verkettungen der Gundfunktion vom Typ $f(x)=e^{a\cdot x}$

Für solche Verkettungen ist die **Kettenregel** notwendig. In Formelsammlungen finden Sie dafür:

Ist eine Funktion f gegeben durch eine Kette der Form $f(x)=u(v(x))$ *, dann gilt für die erste Ableitung:* $f'(x)=u'(v(x))\cdot v'(x)$.

Diese Formel ist im Volksmund auch als „innere Ableitung MAL äußere Ableitung“ bekannt.

Für unser Beispiel aus der Überschrift ergibt sich dann:

- $v(x)=a\cdot x$
- $v'(x)=a$
- $u(x)=e^{()}$
- $u'(x)=e^{()}$

$\Rightarrow$ $f'(x)=a\cdot e^{a\cdot x}$

Hinweis: Die Funktion *f* mit $f(x)=\frac{1}{e^x}$ lässt sich mit dieser Regel ebenfalls ableiten, denn es gilt:

$f(x)=\frac{1}{e^x}=e^{-x}$. Es kann also für den Parameter a = - 1 gesetzt werden.

3. Produktregel für Funktionen des Typs $f(x)=x\cdot e^x$

Es gilt: Ist eine Funktion *f* mit $f(x)=u(x)\cdot v(x)$ gegeben, dann ist ihre Ableitung $f'(x)=u'(x)\cdot v(x)+v'(x)\cdot u(x)$. Diese Regel wird **Produktregel** genannt.

Für unser Beispiel folgt dann:

- $u(x)=x$
- $u'(x)=1$
- $v(x)=e^x$
- $v'(x)=e^x$

$\Rightarrow$

$$f'(x)=1\cdot e^x+e^x\cdot x=e^x\cdot(x+1)$$

4. Quotientenregel für Funktionen des Typs $f(x)=\frac{x}{e^x}$

Es gilt: Ist eine Funktion *f* mit $f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$ gegeben, dann ist ihre Ableitung $f'(x)=\frac{u'(x)\cdot v(x)-v'(x)\cdot u(x)}{(v(x))^2}$. Diese Regel heißt **Quotientenregel**.

Für das Beispiel ergibt sich dann:

- $u(x)=x$
- $u'(x)=1$
- $v(x)=e^x$
- $v'(x)=e^x$

$\Rightarrow$

$$f'(x)=\frac{1\cdot e^x-e^x\cdot x}{(e^x)^2}=\frac{e^x\cdot(1-x)}{(e^x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{1-x}{e^x}$$