

Die Ableitung exponentieller Funktionen

1. Die Ableitung der Gundefunktion $f(x) = e^x$

Im Folgenden werden nur sogenannte „e – Funktionen“ behandelt. Andere Funktionstypen treten in der Schulpraxis eher selten auf, sollten Sie hier Fragen haben, so wenden Sie sich bitte an Ihren Mathe – Lehrer oder an mich.

Gegeben sie die Funktion $f: f(x) = e^x$. Gesucht ist nun die erste Ableitung von f .

Setzt man diese Funktion in den Differentialquotienten ein, so erhält man:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x \cdot e^h - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x \cdot (e^h - 1)}{h} = e^x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h}$$

Es ist nun der Grenzwert $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h}$ zu ermitteln. Hier können Sie die bereits verwendeten Test-einsetzungen nutzen und anschließend den Grenzwert abschätzen.

h	0,1	0,01	0,001
$\frac{e^h - 1}{h}$	$\approx 1,05$	$\approx 1,01$	$\approx 1,001$

Es kann nun vermutet werden, dass dieser Grenzwert gegen 1 strebt, woraus sich oben folgendes ergibt: $e^x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x \cdot 1 = e^x = f'(x)$.

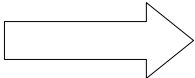
2. Verkettungen der Gundefunktion vom Typ $f(x) = e^{a \cdot x}$

Für solche Verkettungen ist die **Kettenregel** notwendig. In Formelsammlungen finden Sie dafür:

Ist eine Funktion f gegeben durch eine Kette der Form $f(x) = u(v(x))$, dann gilt für die erste Ableitung: $f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$.

Diese Formel ist im Volksmund auch als „innere Ableitung MAL äußere Ableitung“ bekannt.

Für unser Beispiel aus der Überschrift ergibt sich dann:

- $v(x) = a \cdot x$
 - $v'(x) = a$
 - $u(x) = e^{(\quad)}$
 - $u'(x) = e^{(\quad)}$
- 
 $f'(x) = a \cdot e^{a \cdot x}$

Hinweis: Die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{e^x}$ lässt sich mit dieser Regel ebenfalls ableiten, denn es gilt:

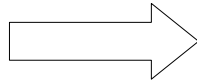
$f(x) = \frac{1}{e^x} = e^{-x}$. Es kann also für den Parameter $a = -1$ gesetzt werden.

3. Produktregel für Funktionen des Typs $f(x) = x \cdot e^x$

Es gilt: Ist eine Funktion f mit $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ gegeben, dann ist ihre Ableitung $f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + v'(x) \cdot u(x)$. Diese Regel wird **Produktregel** genannt.

Für unser Beispiel folgt dann:

- $u(x) = x$
- $u'(x) = 1$
- $v(x) = e^x$
- $v'(x) = e^x$



$$f'(x) = 1 \cdot e^x + e^x \cdot x = e^x \cdot (x+1)$$

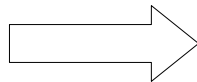
4. Quotientenregel für Funktionen des Typs $f(x) = \frac{x}{e^x}$

Es gilt: Ist eine Funktion f mit $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ gegeben, dann ist ihre Ableitung

$$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - v'(x) \cdot u(x)}{(v(x))^2}. \text{ Diese Regel heißt } \mathbf{Quotientenregel}.$$

Für das Beispiel ergibt sich dann:

- $u(x) = x$
- $u'(x) = 1$
- $v(x) = e^x$
- $v'(x) = e^x$



$$f'(x) = \frac{1 \cdot e^x - e^x \cdot x}{(e^x)^2} = \frac{e^x \cdot (1-x)}{(e^x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1-x}{e^x}$$